ETH Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Algorithmen und Didaktik

Algorithmik für schwere Probleme
Herbstsemester 2025

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Dr. Richard Kralovič

Lösungsvorschläge – Blatt 13

27. Mai 2025

Lösung zu Aufgabe 15

Sei C_{rand} eine (Multi-)Menge von s Wörtern in Σ_2^n, die gleichverteilt und unabhängig voneinander zufällig gewählt wurden. Wir zeigen, dass C_{rand} mit positiver Wahrscheinlichkeit ein Covering-Code von Σ_2^n ist. Sei $w \in \Sigma_2^n$ und $c \in C_{\text{rand}}$. Dann ist

$$\text{Prob}[w \in \text{HBall}_r(c)] = \frac{\text{vol}_2(r,n)}{|\Sigma_2^n|} \,.$$

Es ist also

$$\begin{aligned}
\text{Prob}\Big[w \notin \bigcup_{c \in C_{\text{rand}}} \text{HBall}_r(c)\Big] &= \left(1 - \frac{\text{vol}_2(r,n)}{|\Sigma_2^n|}\right)^s \\
&< e^{-s\cdot \text{vol}_2(r,n)/2^n} \\
&\le e^{-n\cdot \ln(2)} \\
&= 2^{-n} \,,
\end{aligned}$$

wobei wir ausnutzen, dass $1 - x < e^{-x}$ für $x > 0$. Jetzt können wir die Wahrscheinlichkeit abschätzen, dass *irgendein* Wort $w \in \Sigma_2^n$ nicht in einer solchen Menge $\text{HBall}_r(c)$ enthalten ist:

$$\begin{aligned}
\text{Prob}\Big[\bigcup_{w \in \Sigma_2^n} \Big\{w \notin \bigcup_{c \in C_{\text{rand}}} \text{HBall}_r(c)\Big\}\Big] &\le \sum_{w \in \Sigma_2^n} \text{Prob}\Big[w \notin \bigcup_{c \in C_{\text{rand}}} \text{HBall}_r(c)\Big] \\
&< 2^n \cdot 2^{-n} \\
&= 1 \,.
\end{aligned}$$

Das heisst, es muss eine Wahl von C_{rand} geben, die tatsächlich ein Covering-Code ist.