ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Algorithmen und Didaktik

Algorithmik für schwere Probleme
Herbstsemester 2025

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Dr. Richard Kralovič

Lösungsvorschläge – Blatt 12

20. Mai 2025

Lösung zu Aufgabe 13

(a) Sei (G, k) mit $G = (V, E)$ eine Eingabe für DS. Wir erstellen eine Eingabe für SCP und setzen dazu $U = V$ und $\mathcal{F} = \{N_G[v] \mid v \in V\}$, wobei $N_G[v]$ die geschlossene Nachbarschaft von v in G ist, also $N_G[v] = \{v\} \cup \{u \in V, \{u, v\} \in E\}$. Der Parameter $k' = k$ bleibt gleich.

Sei nun D ein Dominating-Set von G. Das bedeutet, dass für jeden Knoten $u \in V$ ein Knoten $v \in D$ existiert mit $u \in N_G[v]$. Also ist $\mathcal{C} = \{N_G[v] \mid v \in D\}$ ein Set-Cover von U mit $|\mathcal{C}| = |D|$.

Falls umgekehrt $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ ein Set-Cover von U ist, dann sei $D \subseteq V$ eine Menge mit $|D| = |\mathcal{C}|$ und $\mathcal{C} = \{N_G[v] \mid v \in D\}$. Sei nun $w \in V$. Da $\mathcal{C}$ die Menge $U = V$ überdeckt, gibt es einen Knoten $v \in D$ mit $u \in N_G[v]$. Also ist $u = v$ oder u und v sind benachbart. Das bedeutet, D ist ein Dominating-Set von G mit $|D| = |\mathcal{C}|$.

Diese Reduktion lässt sich in polynomieller Zeit (sogar unabhängig von k) durchführen.

(b) Sei $(U, \mathcal{F})$ eine Eingabe für SCP mit $U \neq \emptyset$. Wir erstellen eine Instanz für DS. Wir lassen den Parameter $k' = k$ wieder gleich. Wir setzen $V = \{v_u \mid u \in U\} \cup \{w_S \mid S \in \mathcal{F}\}$. Die Knoten w_S bilden eine Clique, ebenso ist w_S verbunden mit allen Knoten v_u mit $u \in S$. Also $E = \{\{w_S, w_{S'}\} \mid S \neq S' \in \mathcal{F}\} \cup \{\{v_u, w_S\} \mid u \in S\}$.

Sei nun $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ ein Set-Cover von U. Dann ist $D = \{w_S \mid S \in \mathcal{C}\}$ ein Dominating-Set von $G = (V, E)$ mit $|D| = |\mathcal{C}|$: Die Menge D enthält mindestens einen Knoten w_S und für alle $S' \in \mathcal{F}$ gilt entweder $S = S'$ oder $\{w_S, w_{S'}\} \in E$. Für alle $u \in U$ gibt es eine Menge $S \in \mathcal{C}$ mit $u \in S$, weil $\mathcal{C}$ ein Set-Cover ist. Das heisst, $w_S \in D$ und $\{w_S, v_u\} \in E$.

Sei umgekehrt D ein Dominating-Set von G. Falls D Knoten v_u mit $u \in U$ enthält, sind diese mit einem Knoten w_S verbunden, da $\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S = U$. Wir ersetzen den Knoten v_u durch einen beliebigen solchen Knoten w_S. Dadurch erhalten wir eine Menge $D' \subseteq \{w_S \mid S \in \mathcal{F}\}$. Sei $\mathcal{C} = \{S \in \mathcal{F} \mid w_S \in D'\}$. Offensichtlich gilt $|\mathcal{C}| = |D'| \leq |D|$. Ausserdem ist $\mathcal{C}$ ein Set-Cover von U: Sei $u \in U$. Falls $v_u \in D$, enthält D' nach Definition einen Knoten w_S mit $\{v_u, w_S\} \in E$, also enthält $\mathcal{C}$ die Menge S und $u \in S$. Falls $v_u \notin D$, enthält D einen Knoten w mit $\{v, w\} \in E$, weil D ein Dominating-Set ist. Nach Definition von E muss $w = w_S$ gelten mit $S \in \mathcal{F}$, also $u \in S$. Dieser Knoten w_S ist auch in D' enthalten und damit $S \in \mathcal{C}$. Es gilt also $U = \bigcup_{S \in \mathcal{C}} S$.

Diese Reduktion lässt sich in polynomieller Zeit (sogar unabhängig von k) durchführen.

Lösung zu Aufgabe 14

(a) Sei (G, k) eine Eingabe für IS. Sei $G = (V, E)$ und $n = |V|$. Wir behaupten

$$(G, k) \in \mathrm{IS} \iff (G, n-k) \in \mathrm{VC}\,.$$

Es gilt sogar, dass $S \subseteq V$ genau dann ein Vertex-Cover von G ist, wenn $V \backslash S$ ein Independent-Set ist. Beide Aussagen sind äquivalent dazu, dass es keine Kanten zwischen Knoten in $V \backslash S$ gibt.

(b) Das Beispiel aus **(a)** lässt sich nicht direkt in eine parametrisierte Reduktion umwandeln, weil der Parameter $k' = n - k$ sich nicht durch eine Funktion $g(k)$ beschränken lässt. Es wäre auch überraschend, wenn wir eine parametrisierte Reduktion finden könnten. In der Vorlesung haben wir parametrisierte Algorithmen bezüglich k für VC kennengelernt, es gilt also VC $\in$ FPT. Umgekehrt haben wir in der Vorlesung gesehen, dass IS bezüglich der Standardparametrisierung W[1]-schwer ist. Eine solche Reduktion würde also implizieren, dass FPT = W[1], was der Exponential Time Hypothesis (ETH) widersprechen würde.