ETH zürich
Departement Informatik

**Algorithmik für schwere Probleme**

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Dr. Richard Kralovič
`https://courses.algodi.inf.ethz.ch/schwereprob-2025`

# Lösungsvorschläge – Blatt 9

Zürich, 29. April 2025

## Lösung zu Aufgabe 10

(a) Wir betrachten den $(\ell \times \ell)$-Gitter-Graphen $G_{\ell\times\ell}$ aus der Aufgabenstellung. Für $\ell = 1$ gilt offensichtlich $\text{tw}(G) = 1$. Sei also $\ell \geq 2$. Zunächst nummerieren wir die Knoten von oben links nach unten rechts durch, wir bezeichnen also den $j$-ten Knoten der $i$-ten Zeile mit $v_{(i-1)\ell+j}$ für $i, j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$.

Die Aussage beweisen wir konstruktiv durch die explizite Angabe einer Baumzerlegung $(T, B)$. Der Einfachheit halber verzichten wir darauf, die Funktion $B$ formal anzugeben, und identifizieren stattdessen die Knotenmenge des Baumes $T = (V_T, E_T)$ mit den Bags. (Dies ist möglich, wenn alle Bags verschieden sind, was wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können.) Die Bags seien $X_k = \{v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell}\}$ für $k = 1, 2, \dots, \ell(\ell-1)$. Wir setzen

$$V_T \coloneqq \{X_1, X_2, \dots, X_{\ell(\ell-1)}\} \quad \text{und}$$
$$E_T \coloneqq \{\{X_i, X_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq \ell(\ell-1) - 1\}.$$

Um uns davon zu überzeugen, dass dies eine gültige Baumzerlegung für $G_{\ell\times\ell}$ ist, überprüfen wir die drei Eigenschaften:

(i) Es ist nach Konstruktion sofort klar, dass jeder Knoten des Gitters in mindestens einer Menge $X_k$ vorkommt.

(ii) Zu sehen, dass jede horizontale Kante in mindestens einer Bag ist, ist offensichtlich. Jede vertikale Kante ist ebenfalls in einer Bag enthalten. Dies folgt sofort aus der Grösse der Bags (diese sind grösser als die Länge einer Zeile) und der Tatsache, dass sich jeweils die Bag $X_{k+1}$ aus der Bag $X_k$ durch Entfernen und Hinzufügen eines Knotens ergibt.

(iii) Alle Bags, die einen festen Knoten enthalten, bilden nach Konstruktion offensichtlich einen Teilbaum in $T$.

Es gilt $|X_k| = \ell + 1$ für $1 \leq k \leq \ell(\ell-1)$, wir haben also gezeigt, dass die Baumweite von $G_{\ell\times\ell}$ höchstens $\ell$ ist.

*Bemerkung:* Wir haben hier sogar einen Spezialfall gezeigt, denn der Baum $T$ ist ein Pfad.

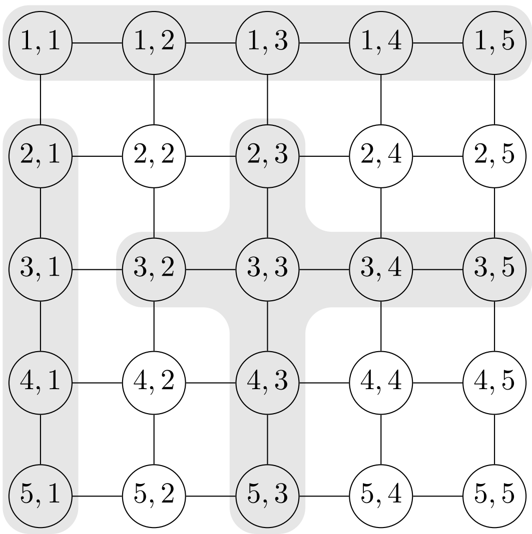


Abbildung 1: Der Gitter-Graph-Graph $G_{5\times 5}$, das Kreuz $\widetilde{C}_{3,3}$ sowie $S$ und $Z$

(b) Wir wollen zeigen, dass der $(\ell \times \ell)$-Gitter-Graph Baumweite mindestens $\ell$ hat. Wir wissen, dass für jeden Graphen $G$ gilt $\operatorname{tw}(G) = \operatorname{bn}(G) - 1$, es reicht also aus, ein Bramble $\mathcal{B}$ der Ordnung mindestens $\ell + 1$ für $G_{\ell\times\ell}$ zu konstruieren.

Für alle $2 \leq i, j \leq \ell$ definieren wir

$$\widetilde{C}_{i,j} \coloneqq \{\,(i,k) \mid 2 \leq k \leq \ell\,\} \cup \{\,(k,j) \mid 2 \leq k \leq \ell\,\}$$

als das Kreuz mit Zentrum $(i, j)$, eingeschränkt auf das Teilgitter ohne die erste Zeile und Spalte. Zudem bezeichnen wir mit

$$Z \coloneqq \{(1,k) \mid 1 \leq k \leq \ell\}$$

die erste Zeile des Gitters und mit

$$S \coloneqq \{(k,1) \mid 2 \leq k \leq \ell\}$$

die erste Spalte des Gitters ohne den ersten Knoten.

Wir können nun zeigen, dass

$$\mathcal{B} = \{Z, S\} \cup \{C_{i,j} \mid 2 \leq i,j \leq \ell\}$$

ein Bramble der Ordnung mindestens $\ell + 1$ ist.

Offenbar sind alle Mengen in $\mathcal{B}$ zusammenhängend und sie berühren sich paarweise. Sei nun $X \subseteq V$ eine Menge, die jede Menge von $\mathcal{B}$ trifft. Wir müssen $|X| \leq \ell$ zu einem Widerspruch führen. Da $S$ und $Z$ jeweils disjunkt zu allen anderen Mengen in $\mathcal{B}$ sind, liegen mindestens zwei Knoten von $X$ in $S$ und $Z$. Es verbleiben höchstens $\ell - 2$ Knoten, um alle Kreuze im Teilgitter $G_{\ell\times\ell} \setminus \{S \cup Z\}$ zu treffen. Von den $\ell - 1$ Spalten dieses Teilgitters trifft $X$ also mindestens eine nicht, ebenso für die Zeilen. Somit trifft $X$ auch das Kreuz, das aus dieser Spalte und Zeile besteht, nicht.