ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Dr. Richard Kralovič
https://courses.algodi.inf.ethz.ch/schwereprob-2025

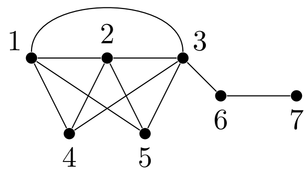
Lösungsvorschläge – Blatt 7

Zürich, 8. April 2025

Lösung zu Aufgabe 8

Wir zeigen, dass die Schwellensprache CVC für das Problem Connected Vertex Cover bezüglich der Grösse k der gesuchten Lösung einen Problemkern mit $\mathcal{O}(2^k)$ Knoten besitzt.

(a) Die Teilmengen H, I und R stellen im Allgemeinen keine Kronenzerlegung des Graphen G dar. Wir betrachten dazu die Instanz (G, k) mit $k = 3$, wobei der Graph G in der folgenden Abbildung definiert ist.



Die Mengen H, I und R sind dabei wie folgt: $H = \{1, 2, 3\}$, $I = \{4, 5\}$ und $R = \{6, 7\}$. Dann müsste I die Krone sein und es gibt tatsächlich keine Kanten zwischen I und R. Es gibt allerdings auch kein Matching zwischen I und H der Grösse $|H| = 3$.

(b) Wir zeigen zunächst, dass $H \subseteq S$ für jede Knotenüberdeckung S mit $|S| \leq k$ gilt. Nehmen wir an, es gibt einen Knoten $u \in H \setminus S$. Damit alle Kanten zu den Nachbarn $N(u)$ von $u \notin S$ abgedeckt werden, muss die ganze Nachbarschaft $N(u)$ in S enthalten sein. Aus $u \in H$ folgt $|N(u)| = \deg(u) \geq k + 1$. Da $N(u) \subseteq S$, erhalten wir nun einen Widerspruch zu $|S| \leq k$.

Nehmen wir an, dass $|H| \geq k + 1$ und $(G, k) \in \text{CVC}$. Also gibt es eine Knotenüberdeckung S von G mit $|S| \leq k$. Aus $H \subseteq S$ erhalten wir mit $|H| \geq k + 1$ sofort einen Widerspruch zu $|S| \leq k$.

(c) Wir zeigen zunächst, dass jeder Knoten $u \in R$ einen Nachbarn $v_u \in R$ hat. Falls $N(u) \subseteq H$, dann wäre $u \in I$. Also gibt es einen Knoten $v_u \in N(u) \setminus H$. Falls $v_u \in I$, dann hätte der Knoten v_u einen Nachbarn $u \in R$ ausserhalb H. Also muss $v_u \in R$ gelten.

Nehmen wir an, dass $|R| \geq k \cdot (k+1) + 1$ und $(G, k) \in \mathrm{CVC}$. Also gibt es eine Knotenüberdeckung S von G mit $|S| \leq k$. Jeder Knoten $u \in R$ hat höchstens k Nachbarn, sonst wäre $u \in H$. Die Knoten aus $S \cap R$ und ihre Nachbarn in R ergeben somit höchstens $|S \cap R| \cdot (k+1) \leq k \cdot (k+1)$ Knoten. Da $|R| \geq k \cdot (k+1) + 1$, gibt es also einen Knoten $u \in R$, der weder in $S \cap R$ enthalten ist noch einen Nachbarn in $S \cap R$ hat. Für diesen Knoten u wird somit die Kante $\{u, v_u\}$ durch die Knotenüberdeckung S nicht abgedeckt—Widerspruch.

(d) Wir haben bereits gezeigt, dass $H \subseteq S$ für jede Knotenüberdeckung S mit $|S| \leq k$ gilt. Durch die Knoten in H werden alle Kanten zwischen H und I abgedeckt, wobei die Menge I eine unabhängige Knotenmenge ist. Somit können die Knoten in I nur dazu beitragen, eine Knotenüberdeckung S zusammenhängend zu machen. Dazu müssen aber keine zwei Knoten aus I mit derselben Nachbarschaft in H mehrmals vorkommen. Für jede Teilmenge $H' \subseteq H$ behalten wir also einen Knoten $u \in I$ mit $N(u) = H'$, wenn es einen solchen überhaupt gibt, und fügen alle anderen Knoten $u' \in I$, $u' \neq u$, mit $N(u') = H'$ einer Menge $I' \subseteq I$ hinzu. Somit enthält die Menge $I \setminus I'$ höchstens einen Knoten für jede Teilmenge $H' \subseteq H$, d.h. insgesamt höchstens $2^{|H|} \leq 2^k$ Knoten. Die Mengen H und R enthalten jeweils höchstens k und $k \cdot (k+1)$ Knoten. Wir können also $|V \setminus I'| \leq 2^k + k + k \cdot (k+1)$ abschätzen.

Es könnte nun aber passieren, dass im Graphen $G \setminus I'$ die Menge der Knoten mit Grad mindestens $k+1$ geschrumpft ist. Also verschieben wir für jeden Knoten $u \in H$ bis zu $k+1$ Knoten aus I' nach I zurück, damit jeder Knoten aus H einen Grad mindestens $k+1$ im Graphen $G \setminus I'$ hat. Die Knotenmenge $V \setminus I'$ ist durch diesen Schritt um höchstens $|H| \cdot (k+1) \leq k \cdot (k+1)$ Knoten gewachsen. Der Graph $G' := G \setminus I'$ mit $V' = V \setminus I'$ besteht somit aus höchstens $|V'| \leq f(k)$ Knoten, mit $f(k) = 2^k + k + 2k \cdot (k+1) \in \mathcal{O}(2^k)$.

Der Graph G' lässt sich offensichtlich in Polynomzeit bezüglich der Grösse von dem Graphen G berechnen. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $(G, k) \in \mathrm{CVC} \iff (G \setminus I', k) \in \mathrm{CVC}$ gilt. Die Knoten im Graphen $G \setminus I'$ können in die Teilmengen H, $I \setminus I'$ und R aufgeteilt werden, sodass

$$\begin{aligned} H &= \{v \in V' \mid \deg(v) \geq k+1\}, \\ I \setminus I' &= \{v \in V' \setminus H \mid N(v) \subseteq H\}, \\ R &= V' \setminus (H \cup (I \setminus I')). \end{aligned}$$

Die Knoten in H müssen in jeder Knotenüberdeckung S von G sowie von $G \setminus I'$ mit $|S| \leq k$ vorkommen. Somit werden alle Kanten abgedeckt, die adjazent zu Knoten in I sind. Eine zusammenhängende Knotenüberdeckung S von $G \setminus I'$ mit $|S| \leq k$ ist somit auch eine zusammenhängende Knotenüberdeckung S von G mit $|S| \leq k$. Für jeden Knoten $u' \in I'$ gibt es einen Knoten in $u \in I \setminus I'$ mit $N(u) = N(u')$. Der Knoten $u' \in I'$ kann dann bei Bedarf durch den Knoten $u \in I \setminus I'$ in einer zusammenhängenden Knotenüberdeckung S von G mit $|S| \leq k$ ersetzt werden, um eine zusammenhängende Knotenüberdeckung S' von $G \setminus I'$ mit $|S'| \leq |S| \leq k$ zu erhalten.

(e) Die Aufteilung der Knoten von G in die Teilmengen H, I und R ist wie folgt: $H = \{1, 2, 3\}$, $I = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ und $R = \emptyset$. Um sicherzustellen, dass die Knoten in H einen Grad mindestens $k+1 = 4$ in dem Kern haben, dürfen wir höchstens einen Knoten aus I entfernen, obwohl alle Knoten in I die gleiche Nachbarschaft haben. Man kann beispielsweise den Knoten $I' = \{8\}$ aus G entfernen, also den Kern $(G', k) = (G \setminus I', k)$ erhalten. Da alle Knoten aus H mit $|H| = 3 = k$ in jeder Knotenüberdeckung S von G sowie $G \setminus I'$ mit $|S| \leq k$ enthalten sein müssen, der induzierte Graph $G[H]$ jedoch nicht zusammenhängend ist, gilt $(G, k) \notin \text{CVC}$ sowie $(G \setminus I', k) \notin \text{CVC}$. Somit wird die Äquivalenz $(G, k) \in \text{CVC} \iff (G', k) \in \text{CVC}$ erfüllt.