ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Dr. Richard Kralovič
`https://courses.algodi.inf.ethz.ch/schwereprob-2025`

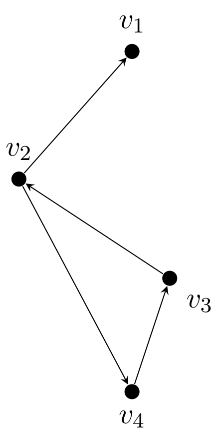
Lösungsvorschläge – Blatt 4

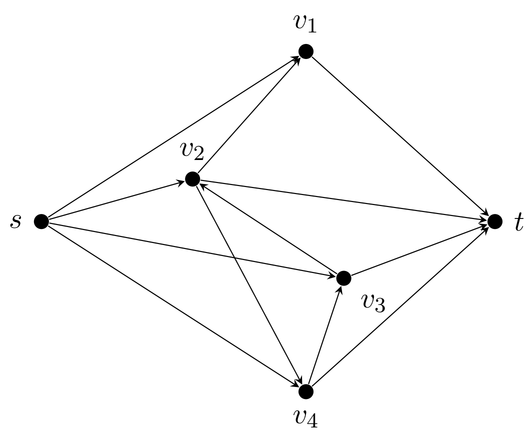
Zürich, 18. März 2025

Lösung zu Aufgabe 5

(a) Wir nehmen einen Umweg über das Problem Directed Hamiltonian Path, wo für einen gegebenen gerichteten Graphen entschieden werden soll, ob es einen Pfad gibt, der alle Knoten genau einmal enthält. Wir reduzieren Hamiltonian Path auf Directed Hamiltonian Path. Für einen ungerichteten Graphen G_1 bilden wir einen gerichteten Graphen G_2, indem wir jede ungerichtete Kante $\{u, v\}$ durch zwei Kanten (u, v) und (v, u) in beide Richtungen ersetzen. Dann können wir aus jedem Pfad in G_1 einen entsprechenden Pfad in G_2 bilden und umgekehrt. Weil Hamiltonian Path NP-schwer ist, ist also auch Directed Hamiltonian Path NP-schwer.

Jetzt reduzieren wir Directed Hamiltonian Path auf Directed Hamiltonian s-t-Path. Für einen gerichteten Graphen G_2 bilden wir einen neuen gerichteten Graphen G_3, der aus allen Knoten und Kanten von G_2 besteht, sowie aus zwei zusätzlichen Knoten s und t. Wir fügen eine Kante von s zu jedem Knoten von G_2 hinzu und von jedem Knoten von G_2 eine Kante zu t. Dann können wir aus jedem Pfad in G_2 einen s-t-Pfad in G_3 bilden, indem wir s vorne und t hinten anhängen. Umgekehrt besteht jeder s-t-Pfad in G_3 aus einem Pfad in G_2, an den vorne s und hinten t angehängt ist. Weil Directed Hamiltonian Path NP-schwer ist, ist also auch Directed Hamiltonian s-t-Path NP-schwer.





(b) Für einen beliebigen solchen Weg sei Q_i die Eigenschaft, dass er den Knoten v_i enthält. Ein Weg von s nach t mit $n + 2$ Knoten ist genau dann ein Hamiltonpfad, wenn er alle Knoten $v_1, \ldots, v_n$ enthält, also wenn er $Q_1, \ldots, Q_n$ erfüllt. Es gilt also

$$X = N\left(\bigwedge_{i=1}^{n} Q_i\right).$$

Gleichzeitig ist k_W genau die Anzahl Wege, welche die Eigenschaften Q_i für $v_i \in W$ *nicht* erfüllen. Es ist also

$$k_W = N\left(\bigwedge_{i \in W} \neg Q_i\right).$$

Nach dem Inklusion-Exklusion-Prinzip gilt also

$$X = \sum_{W \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}} (-1)^{|W|} \cdot k_W \,.$$

(c) Wir nutzen dynamische Programmierung. Ein Weg, der mit s beginnt und genau einen Knoten enthält, kann natürlich nur aus s bestehen. Es gilt also für jede Teilmenge $W \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$ und jeden Knoten $u \in V \backslash W$, dass

$$k_W(u, 1) = \begin{cases} 1 & u = s \\ 0 & u \neq s \end{cases}$$

Wenn wir für $2 \leq m \leq n + 2$ und $u \in V \backslash W$ einen ein Weg von s nach u mit m Knoten betrachten, muss der Vorgänger von u ein Knoten $w \in V \backslash W$ mit $(w, u) \in E$ sein. Der entsprechende Weg von s nach w enthält keine Knoten aus W und hat genau $m - 1$ Knoten. Umgekehrt können wir jeden Weg mit $m - 1$ Knoten von s zu einem Knoten w mit $(w, u) \in E$ zu einem Weg von s nach u erweitern. Es gilt also

$$k_W(u, m) = \sum_{\substack{w \in V \backslash W \\ (w,u) \in E}} k_W(w, m - 1)\,.$$

Für ein gegebenes $W \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$ müssen wir höchstens $|V \backslash W| \cdot (n + 1)$ Werte $k_W(u, m)$ berechnen. Für jeden Wert müssen wir wiederum höchstens $|V \backslash W|$ andere Werte betrachten. Wir können also alle Werte in $\mathcal{O}(n^3)$ bestimmen. Weil es genau 2^n Teilmengen von $\{v_1, \ldots, v_n\}$ gibt, können wir also alle Werte $k_W(u, m)$ in $\mathcal{O}^*(2^n)$ berechnen.

(d) Es gilt für jedes $W \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$, dass $k_W = k_W(t, n + 2)$. Mit Teilaufgabe (c) können wir also alle Werte k_W in $\mathcal{O}^*(2^n)$ berechnen. Mit Teilaufgabe (b) können wir dann in Zeit $\mathcal{O}^*(2^n)$ den Wert von X berechnen. Es gilt offensichtlich, dass Directed Hamiltonian s-t-Path auf G genau dann eine Lösung hat, wenn $X > 0$.