

Übungsaufgaben – Blatt 13

20. Mai 2025

Aufgabe 15

10 Punkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es einen Covering-Code C der Sprache Σ_3^m mit Radius $m/3$ gibt mit $|C| \leq m^2 \cdot 2^{m/3}$. Der Beweis war probabilistisch und nicht konstruktiv. Sei nun $r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie analog zu diesem Beweis, dass es einen Covering-Code C mit Radius r der Sprache Σ_2^n gibt mit

$$|C| \leq s := \left\lceil \frac{n \cdot \ln(2) \cdot 2^n}{\text{vol}_2(r, n)} \right\rceil.$$

Es gilt wie zuvor $\text{Hball}_r(c) = \{c' \in \Sigma_2^n \mid \text{Ham}(c, c') \leq r\}$ und $\text{vol}_2(r, n) = |\text{Hball}_r(c)|$ für jedes $c \in \Sigma_2^n$.