

Übungsaufgaben – Blatt 11

6. Mai 2025

In der Vorlesung wurde ein Approximationsalgorithmus für das Set-Cover-Problem erwähnt, der in polynomieller Zeit läuft. Er wird in der Derandomisierung von Schönings Algorithmus verwendet werden. Der Algorithmus ist ein einfacher Greedy-Algorithmus, der in jedem Schritt eine Menge so wählt, dass möglichst viele neue Knoten abgedeckt werden. In dieser Aufgabe werden wir die Approximationsgüte dieses Algorithmus herleiten.

Eingabe : Eine endliche Menge U und eine Familie $\mathcal{F} \subseteq 2^U$ mit $U = \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$.

1 **Algorithmus** *GREEDY-MIN-SCP* :

2 $\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$;

3 $U_{\text{free}} \leftarrow U$;

4 **while** $U_{\text{free}} \neq \emptyset$ **do**

5 wähle ein $S \in \mathcal{F}$, sodass $|S \cap U_{\text{free}}|$ maximal ist;

6 $U_{\text{free}} \leftarrow U_{\text{free}} \setminus S$;

7 $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{S\}$;

8 **end**

9 **return** $\mathcal{C}$;

Sei $\mathcal{C} = \{S_1, \dots, S_k\}$ die Menge, die der Algorithmus liefert, wobei S_i im i -ten Durchlauf der Schleife gewählt wird. Wir definieren

$$D_{\mathcal{C},i} := S_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j$$

als die Menge der Knoten, die von S_i neu abgedeckt werden. Für $x \in D_{\mathcal{C},i}$ und $T \subseteq U$ definieren wir ausserdem das Gewicht

$$w_{\mathcal{C}}(x) = \frac{1}{|D_{\mathcal{C},i}|}, \quad w_{\mathcal{C}}(T) = \sum_{x \in T} w_{\mathcal{C}}(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass $|\mathcal{C}| = w_{\mathcal{C}}(U)$.

(b) Sei $S \in \mathcal{F}$. Wir schreiben $S = \{x_1, \dots, x_l\}$, wobei wir die Nummerierung der Elemente so wählen, dass x_j im Algorithmus nicht nach x_{j+1} abgedeckt wird. Zeigen Sie, dass

$$w_{\mathcal{C}}(x_j) \leq \frac{1}{l - j + 1}.$$

- (c) Sei nun $\mathcal{C}_{\text{opt}}$ eine optimale Lösung für die Instanz und sei S_{max} eine Menge maximaler Grösse in $\mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass

$$|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{C}_{\text{opt}}| \cdot \text{har}(|S_{\text{max}}|),$$

wobei $\text{har}(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ die n -te harmonische Zahl ist.

- (d) Zeigen Sie, dass der Algorithmus eine $\ln(n)$ -Approximation erreicht für $n = |U| \cdot |\mathcal{F}|$, falls $|\mathcal{F}| \geq 3$. Wieso können wir annehmen, dass $|\mathcal{F}| \geq 3$?
- (e) Überprüfen Sie schliesslich, dass die Laufzeit des Algorithmus in $\mathcal{O}(n^{3/2})$ ist für $n = |U| \cdot |\mathcal{F}|$.

Üebigsuufgabe – Blatt 11

Züri, 6. Mai 2025

Uufgab 12

I de Vorläsig isch en Approximationsalgorithmus für's Mänge-Überdeckigs-Problem erwähnt worde, wo i polynomieller Ziit lauft. Mir bruuched en denn i de Derandomisierig vom Schöning siim Algorithmus. De Algorithmus isch eigentlich eifach en giirige Algorithmus, wo i jedem Schritt e Mängi soo wählt, dass möglichscht vill neui Chnoote abdeckt werded. I däre Uufgaab tümmer dApproximationsgüeti vo dem Algorithmus härleite.

Eingabe: En ändlichi Mängi U und e Familie $\mathcal{F} \subseteq 2^U$ mit $U = \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$.

1 **Algorithmus** *GREEDY-MIN-SCP*:

```
2    $\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$ ;  
3    $U_{\text{free}} \leftarrow U$ ;  
4   while  $U_{\text{free}} \neq \emptyset$  do  
5       wähl es  $S \in \mathcal{F}$ , so dass  $|S \cap U_{\text{free}}|$  maximal isch;  
6        $U_{\text{free}} \leftarrow U_{\text{free}} \setminus S$ ;  
7        $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{S\}$ ;  
8   end  
9   return  $\mathcal{C}$ ;
```

Es sig $\mathcal{C} = \{S_1, \dots, S_k\}$ dMängi, wo de Algorithmus uusgit, und zwar so, dass S_i im i -te Durchlauf vo de Schleife gwählt wird. Mir definiered

$$D_{\mathcal{C},i} := S_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j$$

als dMängi vo Chnoote, wo vo S_i neu abdeckt wärded. Für $x \in D_{\mathcal{C},i}$ und $T \subseteq U$ definiered mir ussertdem no

$$w_{\mathcal{C}}(x) = \frac{1}{|D_{\mathcal{C},i}|}, \quad w_{\mathcal{C}}(T) = \sum_{x \in T} w_{\mathcal{C}}(x).$$

(a) Zeiged Si, dass $|\mathcal{C}| = w_{\mathcal{C}}(U)$.

(b) Es sig $S \in \mathcal{F}$. Mir schriibed $S = \{x_1, \dots, x_l\}$ und wähled debii dNummerierig eso, dass x_j im Algorithmus nöd nach x_{j+1} abdeckt wird. Zeiged Si, dass

$$w_{\mathcal{C}}(x_j) \leq \frac{1}{l - j + 1}.$$

- (c) Es sei jetzt $\mathcal{C}_{\text{opt}}$ ein optimaler Lösungsansatz für die Instanz und es sei S_{max} eine Menge von maximaler Grösse in $\mathcal{F}$. Zeige Sie, dass

$$|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{C}_{\text{opt}}| \cdot \text{har}(|S_{\text{max}}|).$$

Dabei ist $\text{har}(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ die n -te harmonische Zahl.

- (d) Zeige Sie, dass der Algorithmus eine $\ln(n)$ -Approximation erreicht für $n = |U| \cdot |\mathcal{F}|$, wenn $|\mathcal{F}| \geq 3$. Wisse doch immer, dass $|\mathcal{F}| \geq 3$?
- (e) Überprüfe Sie schlussendlich, dass die Laufzeit vom Algorithmus in $\mathcal{O}(n^{3/2})$ ist für $n = |U| \cdot |\mathcal{F}|$.

10 Punkte