ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Dr. Richard Kralovič
`https://courses.algodi.inf.ethz.ch/schwereprob-2025`

Übungsaufgaben – Blatt 10

Zürich, 29. April 2025

Aufgabe 11

In dieser Aufgabe entwerfen wir einen parametrisierten Algorithmus (bezüglich der Baumweite k) für das im Allgemeinen NP-vollständige Problem 3-Colorability, also das Problem zu entscheiden, ob ein gegebener ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit drei Farben färbbar ist.

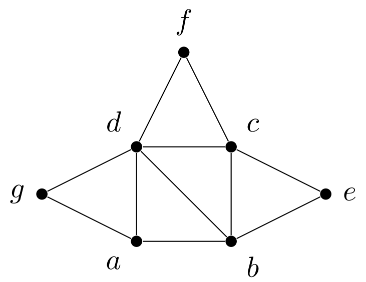
Hierfür benötigen wir eine spezielle Form von Baumzerlegungen: Eine Baumzerlegung $(T, \{X_i \mid i \in I\})$ heisst *einfach,* wenn für alle $i, j \in I, i \neq j$ gilt, dass $X_i \not\subseteq X_j$.

Für unseren Algorithmus gehen wir davon aus, dass wir bereits eine einfache Baumzerlegung $(T, \{X_i \mid i \in I\})$ der Weite k von G berechnet haben. Weiterhin bestimmen wir einen Knoten r als Wurzel von T. Wir betrachten nun für jedes X_i folgende zwei Mengen:

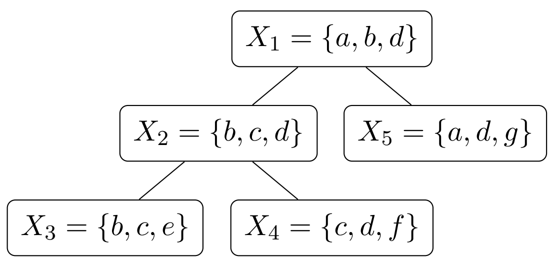
- $\mathrm{Col}(X_i)$ ist die Menge aller 3-Färbungen von $G[X_i]$, dem von X_i induzierten Teilgraphen von G.
- $\mathrm{Extcol}(X_i)$ ist die Menge aller 3-Färbungen in $\mathrm{Col}(X_i)$, die zu 3-Färbungen von $G[X(T_i)]$ erweitert werden können, wobei T_i der Teilbaum von T mit Wurzelknoten X_i ist und $X(T_i) = \bigcup_{X_j \in V(T_i)} X_j$.

Ein Graph ist somit genau dann 3-färbbar, wenn $\mathrm{Extcol}(r) \neq \emptyset$.

In der folgenden Abbildung sind ein Graph $G = (V, E)$ und seine einfache Baumzerlegung der Weite $k = 2$ mit Wurzel $r = X_1$ dargestellt. Der Teilbaum T_2 von T umfasst die Knoten $V(T_2) = \{X_2, X_3, X_4\}$ und es gilt $X(T_2) = X_2 \cup X_3 \cup X_4 = \{b, c, d, e, f\}$.



$G = (V, E)$



$(T, \{X_1, X_2, \ldots, X_5\})$

(a) Beweisen Sie, dass jeder Graph G eine einfache Baumzerlegung der Weite $\mathrm{tw}(G)$ hat, indem Sie einen Algorithmus beschreiben, der eine beliebige Baumzerlegung eines Graphen in eine einfache Baumzerlegung derselben Weite umwandeln kann. Schätzen Sie seine Laufzeit ab (bezüglich k und $|V(T)|$).

Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine Baumzerlegung $(T, \{X_i \mid i \in I\})$ des Graphen G genau dann einfach ist, wenn für jede Kante $\{X_i, X_j\}$ in T gilt, dass $X_i \nsubseteq X_j$ und $X_j \nsubseteq X_i$.

(b) Die Menge $\mathrm{Col}(X_i)$ kann berechnet werden, indem alle möglichen Färbungen $c\colon X_i \to \{1, 2, 3\}$ betrachtet werden und die ungültigen verworfen werden. Bestimmen Sie die dafür benötigte Laufzeit.

(c) Konstruieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung der Mengen $\mathrm{Extcol}(X_i)$ und schätzen Sie seine Laufzeit ab (bezüglich k und $|V(G)|$).

Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $|V(T)| \leq |V(G)|$ für jede einfache Baumzerlegung $(T, \{X_i \mid i \in I\})$ des Graphen G gilt.

10 Punkte

Abgabe: Bis Dienstag, den 6. Mai 2025, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter Moritz Stocker.