

Übungsaufgaben – Blatt 7

Zürich, 1. April 2025

Aufgabe 8

Eine Knotenüberdeckung S eines ungerichteten Graphen G heisst *zusammenhängend*, falls der induzierte Teilgraph $G[S]$ von G auf den Knoten S zusammenhängend ist. Das Problem CONNECTED VERTEX COVER (CVC) besteht darin, für einen gegebenen zusammenhängenden Graphen G eine zusammenhängende Knotenüberdeckung zu finden, die möglichst wenige Knoten enthält. Die entsprechende Schwellensprache ist

$\text{Lang}_{\text{CVC}} = \{ (G, k) \mid G \text{ ist ein zusammenhängender ungerichteter Graph, } k \in \mathbb{N} \text{ und es existiert eine zusammenhängende Knotenüberdeckung } S \text{ von } G \text{ mit } |S| \leq k \}.$

In dieser Aufgabe entwerfen wir Schritt für Schritt einen Kern für Lang_{CVC} . Sei (G, k) mit $G = (V, E)$ eine Instanz für Lang_{CVC} . Wir teilen zunächst die Knoten V von G in drei disjunkte Teilmengen H , I und R auf. Die Menge H enthält alle Knoten mit Grad mindestens $k + 1$. Die Menge I enthält alle Knoten, deren Nachbarschaft in H enthalten ist. Die Menge R besteht aus allen übrigen Knoten. Wie definieren die Teilmengen H , I und R formal wie folgt:

$$\begin{aligned} H &= \{v \in V \mid \deg(v) \geq k + 1\}, \\ I &= \{v \in V \setminus H \mid N(v) \subseteq H\}, \\ R &= V \setminus (H \cup I). \end{aligned}$$

- (a) Stellen die Teilmengen H , I und R eine Kronenzerlegung des Graphen G dar?
- (b) Zeigen Sie, dass $(G, k) \notin \text{Lang}_{\text{CVC}}$, wenn $|H| \geq k + 1$.
- (c) Zeigen Sie, dass $(G, k) \notin \text{Lang}_{\text{CVC}}$, wenn $|R| \geq k \cdot (k + 1) + 1$.
- (d) Wir nehmen also an, dass $|H| \leq k$ und $|R| \leq k \cdot (k + 1)$ gelten. Definieren Sie einen Graphen $G' = (V', E')$, der aus (G, k) in Polynomzeit bezüglich der Grösse von (G, k) berechenbar ist, sodass

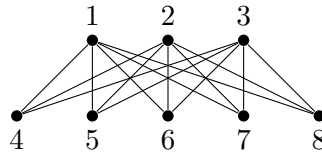
$$(G, k) \in \text{Lang}_{\text{CVC}} \iff (G', k) \in \text{Lang}_{\text{CVC}}$$

und $|V'| \leq f(k)$ gelten für eine Funktion f . Geben Sie die Funktion f explizit an.

Hinweis. Der Graph G' kann beispielsweise aus dem Graphen G erhalten werden, indem eine passende Teilmenge der Knoten $I' \subseteq I$ aus G entfernt wird.

(bitte wenden)

- (e) Bestimmen Sie den Kern (G', k) für die Instanz (G, k) mit $k = 3$, wobei der Graph $G = K_{3,5}$ als der vollständige bipartite Graph aus der folgenden Abbildung definiert ist, indem Sie Ihren Algorithmus zur Kernbildung auf die Instanz (G, k) anwenden.



Überprüfen Sie, dass die Äquivalenz $(G, k) \in \text{Lang}_{\text{CVC}} \iff (G', k) \in \text{Lang}_{\text{CVC}}$ gilt.

10 Punkte

Abgabe: Bis Dienstag, den 8. April 2025, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter **Moritz Stocker**.