ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Dr. Richard Kralovič
`https://courses.algodi.inf.ethz.ch/schwereprob-2025`

Übungsaufgaben – Blatt 6

Zürich, 25. März 2025

Aufgabe 7

Das Problem MAX-SAT besteht darin, für eine gegebene KNF-Formel Φ eine Belegung zu finden, die möglichst viele Klauseln in Φ erfüllt. Die entsprechende Schwellensprache ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Lang}_{\textsc{Max-Sat}} = \{\, (\Phi, k) \mid\, & \Phi \text{ ist eine KNF-Formel, } k \in \mathbb{N},\\ & \text{und es existiert eine Belegung,}\\ & \text{die mindestens } k \text{ Klauseln in } \Phi \text{ erfüllt} \,\}.\end{aligned}$$

In dieser Aufgabe wollen wir Schritt für Schritt einen Kern für $\mathrm{Lang}_{\textsc{Max-Sat}}$ bestimmen. Wie üblich nehmen wir an, dass in jeder Klausel einer KNF-Formel jede Variable höchstens einmal vorkommt.

(a) Sei m die Anzahl Klauseln in Φ. Zeigen Sie, dass $(\Phi, k) \in \mathrm{Lang}_{\textsc{Max-Sat}}$, wenn $k \leq \lceil m/2 \rceil$.

(b) Wir unterteilen Φ jetzt in zwei Teilmengen Φ_l und Φ_s. Die Menge Φ_l enthält alle *langen* Klauseln, d. h. solche, die mindestens k Literale enthalten; die Menge Φ_s enthält alle *kurzen* Klauseln, d. h. solche, die weniger als k Literale enthalten. Sei L die Anzahl langer Klauseln. Zeigen Sie, dass $(\Phi, k) \in \mathrm{Lang}_{\textsc{Max-Sat}}$, wenn $L \geq k$.

(c) Wir setzen jetzt also voraus, dass $k > \lceil m/2 \rceil$ und $L < k$. Zeigen Sie, dass dann gilt $(\Phi_s, k - L) \in \mathrm{Lang}_{\textsc{Max-Sat}} \iff (\Phi, k) \in \mathrm{Lang}_{\textsc{Max-Sat}}$.

(d) Zeigen Sie jetzt, dass sich die Eingabe (Φ, k) in Polynomzeit auf einen Kern mit höchstens $2k^2$ Literalen reduzieren lässt.

10 Punkte

Abgabe: Bis Dienstag, den 1. April 2025, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter Moritz Stocker.