

Übungsaufgaben – Blatt 5

Zürich, 18. März 2025

Aufgabe 6

Wir betrachten das Problem FEEDBACK ARC SET IN TOURNAMENTS (FAST). Die Eingabe ist ein Turnier, also ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, sodass für jedes Paar von Knoten $u \neq v$ aus V genau eine der Kanten (u, v) oder (v, u) in E enthalten ist. Ein solches Turnier heisst *azyklisch*, wenn es keinen gerichteten Kreis in G gibt.

Ein *Feedback Arc Set* ist eine Menge von Kanten $A \subseteq E$, sodass G azyklisch wird, wenn die Richtung jeder Kante in A umgedreht wird. Das Optimierungsproblem FAST besteht darin, ein minimales Feedback Arc Set zu finden. Die entsprechende Schwellensprache ist

$$\text{FAST} = \{(G, k) \mid G = (V, E) \text{ ist ein Turnier, } k \in \mathbb{N} \text{ und es gibt ein Feedback Arc Set } A \subseteq E \text{ mit } |A| \leq k\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass ein Turnier $G = (V, E)$ genau dann azyklisch ist, wenn es kein gerichtetes Dreieck enthält, also keine Folge von Knoten (u, v, w) mit $(u, v) \in E$, $(v, w) \in E$ und $(w, u) \in E$.
- (b) Für ein Turnier $G = (V, E)$ und $e \in E$ bezeichnen wir mit $G(\bar{e})$ den Graphen, der entsteht, wenn wir in G die Richtung von e umdrehen. Nehmen wir an, dass es eine Kante $e \in E$ gibt, die Teil von $k + 1$ unterschiedlichen gerichteten Dreiecken ist. Zeigen Sie, dass

$$(G, k) \in \text{FAST} \iff (G(\bar{e}), k - 1) \in \text{FAST}.$$

- (c) Sei $x \in V$ ein Knoten, der Teil von keinem gerichteten Dreieck ist. Zeigen Sie, dass

$$(G, k) \in \text{FAST} \iff (G - x, k) \in \text{FAST}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $V_x^+ = \{v \in V \mid (x, v) \in E\}$ und $V_x^- = \{v \in V \mid (v, x) \in E\}$.

- (d) Zeigen Sie, dass FAST einen Kern mit höchstens $k \cdot (k + 2)$ Knoten hat.

10 Punkte

Abgabe: Bis Dienstag, den 25. März 2025, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter **Moritz Stocker**.