ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Dr. Richard Kralovič
`https://courses.algodi.inf.ethz.ch/schwereprob-2025`

Übungsaufgaben – Blatt 4

Zürich, 11. März 2025

Aufgabe 5

Wir betrachten das Problem DIRECTED HAMILTONIAN s-t-PATH. Das Problem besteht darin, für einen gegebenen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s \neq t$ in V zu bestimmen, ob es in G einen gerichteten Hamilton-Pfad von s nach t gibt, also einen Pfad von s nach t, der alle Knoten von V enthält.

Um das Problem zu lösen, gehen wir sogar noch einen Schritt weiter und zählen die Anzahl X solcher Pfade. Zu diesem Zweck definieren wir $V = \{s, t, v_1, \ldots, v_n\}$.

(a) Argumentieren Sie kurz, wieso das Problem DIRECTED HAMILTONIAN s-t-PATH NP-schwer ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass das HAMILTON PATH Problem auf ungerichteten Graphen NP-schwer ist.

(b) Sei $W \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$. Wir definieren k_W als die Anzahl gerichteter Wege von s nach t mit genau $n + 2$ Knoten, die keinen Knoten $v_i \in W$ enthalten. (Ein Weg kann – im Gegensatz zu einem Pfad – Knoten auch mehrfach enthalten.) Drücken Sie X durch die Werte k_W aus.

Hinweis: Benutzen Sie das Inklusion-Exklusion-Prinzip.

(c) Wir definieren zusätzlich für $W \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$, $u \in V \backslash W$ und $1 \leq m \leq n + 2$ die Werte $k_W(u, m)$ als die Anzahl gerichteter Wege von s nach u in G mit genau m Knoten, die keinen Knoten $v_i \in W$ enthalten. Zeigen Sie, dass in $\mathcal{O}^*(2^n)$ alle Werte $k_W(u, m)$ berechnet werden können.

(d) Schliessen Sie, dass das Problem DIRECTED HAMILTONIAN s-t-PATH in $\mathcal{O}^*(2^n)$ lösbar ist.

10 Punkte

Abgabe: Bis Dienstag, den 18. März 2025, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter Moritz Stocker.