

Übungsaufgaben – Blatt 6

Zürich, 28. März 2023

Aufgabe 7

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. G heisst *Split-Graph*, falls wir die Knoten in eine Clique und ein Independent-Set aufteilen können, das heisst, wenn $V = C \cup I$, wobei $G[C]$ ein vollständiger Graph ist und $G[I]$ keine Kanten enthält. (C, I) heisst dann eine *Split-Partition* von G . Wir betrachten nun das Problem SPLIT VERTEX DELETION (SVD). Eine Lösung für die Instanz $G = (V, E)$ besteht aus einer Teilmenge $S \subseteq V$, sodass $G[V \setminus S]$ ein Split-Graph ist. Die dazugehörige Schwellensprache ist

$$\text{Lang}_{\text{SVD}} = \{(G, k) \mid G = (V, E) \text{ ist ein Graph, } k \in \mathbb{N}, \exists S \subseteq V, |S| \leq k, \\ G[V \setminus S] \text{ ist ein Split-Graph.}\}$$

Wir entwerfen nun mithilfe iterativer Kompression einen k -parametrisierten Algorithmus für Lang_{SVD} , wie wir es für VERTEX-COVER gesehen haben.

- Sei $G = (V, E)$ ein Split-Graph. Zeigen Sie, dass G höchstens $\mathcal{O}(|V|^2)$ unterschiedliche Split-Partitionen hat. (Tatsächlich gibt es davon sogar höchstens $|V| + 1$.)
- Das folgende Problem entspricht dem Problem DISJOINT-VERTEX-COVER im Algorithmus für VERTEX-COVER. Sei $H = (V, E)$ ein Graph, $r \in \mathbb{N}$, $T \subseteq V$ eine Lösung für H , sodass zusätzlich $H[T]$ ebenfalls ein Split-Graph ist, und (C_0, I_0) eine Split-Partition für $H[T]$. Zeigen Sie, dass wir in polynomieller Zeit eine Lösung X für H finden können, sodass $|X| \leq r$, $X \cap T = \emptyset$ und es eine Split-Partition (C_X, I_X) von $H[V \setminus X]$ gibt mit $C_0 \subseteq C_X$ und $I_0 \subseteq I_X$, oder einsehen, dass es kein solches X gibt.
Hinweis: Betrachten Sie eine Split-Partition (C_1, I_1) von $H[V \setminus T]$. Wie gross können $C_1 \cap I_X$ und $I_1 \cap C_X$ sein?
- Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $S \subseteq V$ eine Lösung für G mit $|S| = k + 1$. Zeigen Sie, dass wir in polynomieller Zeit eine Lösung S' für G mit $|S'| \leq k$ finden können, oder entscheiden können, dass es keine solche Lösung gibt.
Hinweis: Betrachten Sie mögliche Schnittmengen $Y = S \cap S'$ und den Graphen $G[V \setminus Y]$.
- Beschreiben Sie einen k -parametrisierten Algorithmus für Lang_{SVD} .

10 Punkte

Abgabe: Bis Dienstag, den 4. April 2023, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter **Moritz Stocker**.