ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
https://courses.ite.inf.ethz.ch/schwere_prob_23/

Übungsaufgaben – Blatt 4

Zürich, 14. März 2023

Aufgabe 4

Wir untersuchen nochmals das Problem $\text{Lang}_{\text{Max-Sat}}$, das wir schon von Übungsaufgabe 3 kennen. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass jede vorgegebene Instanz (Φ, k) in Polynomzeit auf eine Instanz mit höchstens k Variablen und weniger als $2k$ Klauseln reduziert werden kann. Dazu setzen wir ohne Beweis die folgende Aussage voraus.

Satz. *Ein Graph mit Bipartition (P, Q) hat ein P saturierendes Matching genau dann, wenn für jede Teilmenge $S \subseteq P$ gilt, dass $|N(S)| \geq |S|$. Es gibt ein Polynomzeitalgorithmus, der entweder*

1. *ein P saturierendes Matching oder*
2. *eine bezüglich der Teilmengenrelation minimale Teilmenge $S \subseteq P$ mit $|N(S)| < |S|$*

findet.

Sei Φ eine beliebige KNF-Formel über n Variablen mit m Klauseln. Der *Variablen-Klausel-Inzidenzgraph* G_Φ von Φ ist ein Graph mit Bipartition (X, Y), wobei X aus einem Knoten pro Variable von Φ besteht und Y aus einem Knoten pro Klausel von Φ. Ein Variablenknoten ist genau dann zu einem Klauselknoten adjazent, wenn die Klausel die entsprechende Variable enthält – ob negiert oder nicht, ist egal. Beweisen Sie nun folgende Aussagen.

(a) Aus $m \geq 2k$ folgt $(\Phi, k) \in \text{Max-Sat}$.

(b) Wenn G_Φ ein X saturierendes Matching hat, hat Φ eine Belegung, die mindestens $|X|$ Klauseln erfüllt.

(c) Wenn G_Φ kein X saturierendes Matching hat, finden wir in Polynomzeit eine Kronenzerlegung (C, H, B) von G_Φ mit $C \subseteq X$ und $H \subseteq Y$.

(d) Falls G_Φ eine Kronenzerlegung (C, H, B) hat, dann erfüllt jede Belegung von Φ, welche die Anzahl erfüllter Klauseln maximiert, alle Klauseln, die von Knoten in H repräsentiert werden.

(e) Die vorgegebene Instanz (Φ, k) lässt sich in Polynomzeit auf einen Kern mit höchstens k Variablen und weniger als $2k$ Klauseln reduzieren.

10 Punkte

Abgabe: Bis Dienstag, den 21. März 2023, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter Moritz Stocker.