



Übungsaufgaben – Blatt 4

12. März 2026

Aufgabe 4

10 Punkte

- (a) Sei $U \in \text{NPO}$ ein Optimierungsproblem, bei dem die Menge $\{\text{cost}(y) \mid y \in \mathcal{M}(I)\}$ der möglichen Kosten einer Lösung zu einer Instanz I nur aus positiven ganzen Zahlen besteht und für die Kosten der optimalen Lösung Opt zu einer Instanz I gilt, dass $\text{cost}(\text{Opt}(I)) \leq p(|I|, \text{Max-Int}(I))$ für ein von I unabhängiges Polynom p .

Zeigen Sie, dass es kein FPTAS für U geben kann, wenn die Schwellenwertsprache Lang_U stark NP-schwer und $\text{P} \neq \text{NP}$ ist.

- (b) Finden Sie ein stark NP-schweres Problem, für das es ein FPTAS gibt.

Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das TSP NP-schwer bleibt, wenn die Kantenkosten auf 1 und 2 beschränkt werden.

Aufgabe 5

10 Punkte

Wir möchten jetzt ein Optimierungsproblem finden, dessen Schwellenwertsprache *nicht* stark NP-schwer ist, das aber trotzdem kein FPTAS besitzt, sofern $\text{P} \neq \text{NP}$.

Wir betrachten dazu das *zweidimensionale* Rucksackproblem, bei der Gegenstände einen Wert, ein Gewicht und eine Grösse haben und der Wert des Rucksacks maximiert werden soll, ohne das Maximalgewicht und die Maximalgrösse zu überschreiten:

(bitte wenden)

Optimierungsproblem 2D-KNAPSACK

Eingabe: Positive ganze Zahlen B_w und B_s , sowie positive ganze Zahlen $c_1, \dots, c_n$, $w_1, \dots, w_n$ und $s_1, \dots, s_n$.

Zulässige Lösungen:

$$\mathcal{M}(B_w, B_s, c_1, \dots, c_n, w_1, \dots, w_n, s_1, \dots, s_n) = \{T \subseteq \{1, \dots, n\} \mid \sum_{i \in T} w_i \leq B_w, \sum_{i \in T} s_i \leq B_s\}$$

Kosten: Für eine Menge $T \in \mathcal{M}(B_w, B_s, c_1, \dots, c_n, w_1, \dots, w_n, s_1, \dots, s_n)$ ist

$$\text{cost}(T, B_w, B_s, c_1, \dots, c_n, w_1, \dots, w_n, s_1, \dots, s_n) = \sum_{i \in T} c_i.$$

Ziel: Maximierung.

Wir benötigen ausserdem das folgende **NP**-schwere Entscheidungsproblem, in dem festgestellt werden soll, ob eine Menge von Zahlen in zwei gleich grosse Mengen mit derselben Summe aufgeteilt werden kann:

Entscheidungsproblem EXACT PARTITION

Eingabe: Positive ganze Zahlen $a_1, \dots, a_n$ für ein gerades n .

Ausgabe:

“Ja” falls es ein $T \subseteq \{1, \dots, n\}$ gibt mit $|T| = n/2$ und $\sum_{i \in T} a_i = \sum_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus T} a_i$
“Nein” sonst

- (a) Konstruieren Sie für eine Eingabe I für EXACT PARTITION eine Eingabe I' für 2D-KNAPSACK, sodass I' genau dann eine Lösung der Grösse mindestens $n/2$ hat, wenn I eine Ja-Instanz ist.

Hinweis: Verwenden Sie Grössen der Form $s_i = \max_{1 \leq j \leq n} \{a_j\} - a_i$.

- (b) Schliessen Sie daraus, dass es kein FPTAS für 2D-KNAPSACK gibt, ausser wenn $P = NP$ gilt.
- (c) Beschreiben Sie, wie ein pseudopolynomieller Algorithmus für 2D-KNAPSACK aussehen könnte und argumentieren Sie kurz, warum er die gewünschte Laufzeit erreicht.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 19. März 2026, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter [Moritz Stocker](#).