ETH zürich
Departement Informatik

Approximations- und Online-Algorithmen

Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Manuel Wettstein

courses.csedu.inf.ethz.ch/approx_online_alg_24

Lösungsvorschläge – Blatt 12

Zürich, 30. Mai 2024

Lösung zu Aufgabe 16

Wir betrachten also den randomisierten Online-Algorithmus $\textsc{Circ}$ für das k-Server-Problem auf einem Kreisgraphen G_N und zeigen, dass dieser $2k$-kompetitiv ist. Sei $e_{\text{split}} = e_i$ für ein i mit $1 \leq i \leq N$ die von $\textsc{Circ}$ zufällig ausgewählte Kante und sei $P_{i,N}$ der so entstandene Pfad, auf dem DC simuliert wird. Sei ferner $\textsc{LinOpt}_i$ ein optimaler Algorithmus für $P_{i,N}$; mit $\textsc{Circ}_i$ bezeichnen wir das Verhalten von $\textsc{Circ}$ auf $P_{i,N}$. Aus der k-Kompetitivität von DC folgt sofort, dass

$$\text{cost}(\textsc{Circ}_i(I)) \leq k \cdot \text{cost}(\textsc{LinOpt}_i(I)) + \alpha$$

für jede Instanz I auf $P_{i,N}$ gilt, wobei α eine Konstante ist.

Sei jetzt $\textsc{Opt}$ ein optimaler Offline-Algorithmus für die gegebene Instanz I auf G_N. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, $\textsc{Opt}$ sei träge. Wir betrachten ausserdem den Algorithmus $\textsc{DOpt}_i$, der genau wie $\textsc{Opt}$ agiert, jedoch immer, wenn $\textsc{Opt}$ die Kante e_i überquert, stattdessen einen Umweg in entgegengesetzter Richtung läuft, was jeweils Kosten von weniger als N verursacht. Damit ist $\textsc{DOpt}_i$ faktisch ein Algorithmus für $P_{i,N}$, und wegen der Optimalität von $\textsc{LinOpt}$ folgt wiederum $\text{cost}(\textsc{LinOpt}_i(I)) \leq \text{cost}(\textsc{DOpt}_i(I))$ und somit

$$\text{cost}(\textsc{Circ}_i(I)) \leq k \cdot \text{cost}(\textsc{DOpt}_i(I)) + \alpha\ .$$

Wenn wir nun die entsprechenden Kosten als Zufallsvariablen bezüglich der zufälligen Wahl von e_i auffassen, folgt

$$\mathbb{E}[\text{cost}(\textsc{Circ}(I))] \leq k \cdot \mathbb{E}[\text{cost}(\textsc{DOpt}(I))] + \alpha\ . \tag{1}$$

Wir bemerken, dass die zufällig gewählte Kante $e_{\text{split}} = e_i$ dem Gegenspieler nicht bekannt ist und dass sie uniform zufällig gezogen wird. Somit können wir nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass e_{split} in einem Zeitschritt von $\textsc{Opt}$ benutzt wird, was wir mit einem einfachen Zählargument tun. Seien, für jeden Zeitschritt T_j mit $1 \leq j \leq n$, c_j die Kosten von $\textsc{Opt}$ in diesem Zeitschritt. Kosten von c_j bedeuten nichts anderes, als dass $\textsc{Opt}$ in diesem Zeitschritt c_j Kanten benutzt, denn alle Kantenkosten sind 1. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Kanten e_{split} ist, ist somit genau c_j/N; mit dieser Wahrscheinlichkeit hat

$\textsc{DOpt}_i$ also Kosten N im $j$ten Zeitschritt. Folglich sind die Kosten, die $\textsc{DOpt}_i$ aufgrund von Umwegen zu zahlen hat, im Erwartungswert höchstens

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{N} N \; .$$

Damit folgt für die erwarteten Kosten von $\textsc{DOpt}$ auf I

$$\mathbb{E}[\mathrm{cost}(\textsc{DOpt}(I))] \leq \mathrm{cost}(\textsc{Opt}(I)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{N} N = 2 \cdot \mathrm{cost}(\textsc{Opt}(I)) \; . \tag{2}$$

Mit (1) und (2) ergibt sich schliesslich

$$\mathbb{E}[\mathrm{cost}(\textsc{Circ}(I))] \leq k \cdot \mathbb{E}[\mathrm{cost}(\textsc{DOpt}(I))] + \alpha \leq 2k \cdot \mathrm{cost}(\textsc{Opt}(I)) + \alpha \; ,$$

also dass der erwartete kompetitive Faktor von $\textsc{Circ}$ höchstens $2k$ ist.