Departement Informatik

Approximations- und Online-Algorithmen

Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Manuel Wettstein

courses.csedu.inf.ethz.ch/approx_online_alg_24

Lösungsvorschläge – Blatt 9

Zürich, 2. Mai 2024

Lösung zu Aufgabe 11

(a) Der Gegenspieler bietet nacheinander m Jobs mit Kosten von jeweils 1 an. Sollte der gegebene Online-Algorithmus $\textsc{Alg}$ zwei davon derselben Maschine zuordnen, wird die Eingabe sofort beendet und die berechnete Lösung ist somit doppelt so teuer wie die optimale. Sollte $\textsc{Alg}$ nach dem letzten Zeitschritt alle Jobs verschiedenen Maschinen zugewiesen haben, wird ein Job mit Kosten 2 gegeben, der zu einem Makespan von 3 führt, wohingegen die optimale Lösung Kosten von 2 hat.

(b) Wir führen einen Widerspruchsbeweis, wie im Aufgabentext vorgeschlagen. Sei $\varepsilon > 0$. Angenommen, es existiert ein $(3/2 - \varepsilon)$-kompetitiver Online-Algorithmus mit einer additiven Konstanten $\alpha > 0$. (Für $\alpha = 0$ haben wir die Aussage bereits mit Teilaufgabe (a) bewiesen.) Offensichtlich ist diese Aussage nur sinnvoll für $\varepsilon \leq 1/2$. Wir nutzen dieselbe Instanz wie in Aufgabenteil (a), bloss mit einer Skalierung aller Kosten (Joblängen) mit dem Faktor α/ε. Der Gegenspieler bietet also zunächst m Jobs an, die diesmal jeweils Kosten von α/ε besitzen. Sollte $\textsc{Alg}$ wieder zwei davon derselben Maschine zuteilen, endet die Eingabe. Da $\textsc{Alg}$ $(3/2 - \varepsilon)$-kompetitiv ist, muss gelten

$$\mathrm{cost}(\textsc{Alg}(I)) \leq \left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)\mathrm{cost}(\textsc{Opt}(I)) + \alpha$$

und somit

$$\begin{aligned} & 2\frac{\alpha}{\varepsilon} \leq \left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)\frac{\alpha}{\varepsilon} + \alpha \\ \iff \quad & 2\frac{\alpha}{\varepsilon} \leq \frac{3}{2}\frac{\alpha}{\varepsilon} - \alpha + \alpha \\ \iff \quad & \frac{\alpha}{2\varepsilon} \leq 0 \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist.

Sollte Alg wiederum alle Jobs verschiedenen Maschinen zuweisen, folgt ein Job mit den doppelten Kosten $2\alpha/\varepsilon$ im letzten Zeitschritt. Nun folgt, dass

$$\begin{aligned} & 3\frac{\alpha}{\varepsilon} \le \left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right) \cdot 2\frac{\alpha}{\varepsilon} + \alpha \\ \iff \quad & 0 \quad \le -\varepsilon \cdot 2\frac{\alpha}{\varepsilon} + \alpha \\ \iff \quad & 2\alpha \le \alpha \ , \end{aligned}$$

gelten muss, was erneut ein Widerspruch ist.