ETH zürich
Department Informatik

Approximations- und Online-Algorithmen

Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Manuel Wettstein

courses.csedu.inf.ethz.ch/approx_online_alg_24

Lösungsvorschläge – Blatt 8

Zürich, 25. April 2024

Lösung zu Aufgabe 10

MC bekommt als Eingabe ein Tripel (G, d, k) bestehend aus einem Graphen $G = (V, E)$, einer metrischen Distanzfunktion $d\colon V(G) \times V(G) \to \mathbb{R}^{>0}$ und einer positiven ganzen Zahl k. Als Mass für die Länge der Eingabe (G, d, k) wählen wir die Anzahl der Knoten von G, also $|(G, d, k)| = |V(G)| = n$.

Das Problem $\text{GAP}_{1,2-\varepsilon}$-MC ist das Lückenproblem zu MC, bei dem für jede Eingabe (G, d, k) entweder gilt

$$\frac{\text{Opt}_{\text{MC}}(G, d, k)}{n} < 1 \quad \text{oder} \quad 2 - \varepsilon \leq \frac{\text{Opt}_{\text{MC}}(G, d, k)}{n}.$$

Wir definieren eine Reduktion von DS auf $\text{GAP}_{1,2-\varepsilon}$-MC wie folgt:

Aus einer Instanz (G', k') mit $G' = (V, E)$ für DS generieren wir eine Instanz (G, d, k) für $\text{GAP}_{1,2-\varepsilon}$-MC. Dabei wählen wir $G \coloneqq G'$ und $k \coloneqq k'$. Weiter ist d die Distanzfunktion, die für alle Knotenpaare $(u, v) \in V(G) \times V(G)$ die Distanz zwischen u und v angibt, und für die gilt:

$$d(u, v) = \begin{cases} n - 1, & \text{falls } \{u, v\} \in E, \\ 2n - 2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beachte, dass diese Distanzfunktion metrisch ist. Falls nun G ein Dominating Set D der Grösse höchstens k hat, können wir für die Instanz (G, d, k) alle Städte aus D wählen, um in ihnen Wachen zu bauen, und jede Stadt hat Distanz höchstens $n - 1$ zur nächsten Wache. Falls G kein Dominating Set der Grösse k oder kleiner hat, dann gibt es für jede Wahl von k Städten, in denen Wachen gebaut werden, mindestens eine Stadt $u \in V$, deren Distanz zu jeder Feuerwehrwache mindestens $2n - 2$ ist.

Wir haben also einerseits

$$(G, k) \in \text{DS} \implies \text{Opt}_{\text{MC}}(G, d, k) = n - 1 \implies \frac{\text{Opt}_{\text{MC}}(G, d, k)}{n} < 1$$

und andererseits

$$(G, k) \notin \text{DS} \implies \text{Opt}_{\text{MC}}(G, d, k) \geq 2n - 2 \implies \frac{\text{Opt}_{\text{MC}}(G, d, k)}{n} \geq 2 - \frac{2}{n}.$$

Wenn wir also $\mathrm{GAP}_{1,2-\varepsilon}$-MC für ein $\varepsilon > 0$ in polynomieller Zeit entscheiden könnten, könnten wir auch DS in polynomieller Zeit lösen, was aber unter der Annahme $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ nicht möglich ist, da DS NP-schwer ist. Das heisst, auch $\mathrm{GAP}_{1,2-\varepsilon}$-MC ist NP-schwer für jedes $\varepsilon > 0$. Aus der Vorlesung und aus dem Buch (Lemma 7.5) wissen wir daher, dass kein polynomieller Algorithmus existiert, der Metric-Center mit einer Güte von $2 - \varepsilon$ approximiert, falls $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.