Lösungsvorschläge – Blatt 7

Zürich, 18. April 2024

Lösung zu Aufgabe 9

Sei $C = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$, $C_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3})$ eine gegebene MAXE3SAT-Eingabe über den Variablen $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Mit $|C|$ bezeichnen wir die Länge der Eingabe durch die Anzahl der enthaltenen Klauseln. Es gilt $|C| = m$.

Wir konstruieren aus C eine MAX2SAT-Eingabe Φ wie folgt: Für jede Klausel C_i , $1 \leq i \leq m$, konstruieren wir zunächst eine Teilformel Φ_i .

Sei $C_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3})$. Dann definieren wir

$$\Phi_i = (l_{i,1} \vee y_i) \wedge (l_{i,2} \vee y_i) \wedge (l_{i,3} \vee y_i) \wedge (l_{i,1} \vee \bar{y}_i) \wedge (l_{i,2} \vee \bar{y}_i) \wedge (l_{i,3} \vee \bar{y}_i).$$

Dabei ist y_i eine neue Variable, die in C nicht vorkommt, für alle $1 \leq i \leq m$.

Die vollständige MAX2SAT-Instanz ist nun $\Phi = \bigwedge_{i=1}^m \Phi_i$.

Für jede Belegung β , die C_i erfüllt, gilt unabhängig von der Belegung von y_i ,

$$\begin{aligned} \text{genau 1 Literal in } C_i \text{ erfüllt} &\implies 4 \text{ Klauseln in } \Phi_i \text{ erfüllt,} \\ \text{genau 2 Literale in } C_i \text{ erfüllt} &\implies 5 \text{ Klauseln in } \Phi_i \text{ erfüllt,} \\ \text{genau 3 Literale in } C_i \text{ erfüllt} &\implies 6 \text{ Klauseln in } \Phi_i \text{ erfüllt.} \end{aligned}$$

Für eine Belegung β , die C_i nicht erfüllt, gilt wiederum unabhängig von der Belegung von y_i , dass sie genau 3 Klauseln in Φ_i erfüllt.

Wir wollen nun zeigen, dass diese Transformation eine GP-Reduktion von MAXE3SAT auf MAX2SAT mit den Parametern (s, c) und $(s', c') = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot s, \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot c)$ ist.

Sei C eine MAXE3SAT-Formel mit $\text{cost}(\text{OPT}(C)) < s \cdot m = s \cdot |C|$.

Für jede Klausel, die in C erfüllt ist, werden in Φ maximal 6 Klauseln erfüllt. Und für jede nicht erfüllte Klausel in C werden genau 3 Klauseln in Φ erfüllt. Somit gilt für die Anzahl t_s erfüllter Klauseln in Φ :

$$t_s < 6 \cdot s \cdot m + 3 \cdot (1 - s) \cdot m = (3 + 3s) \cdot m.$$

Für jede Klausel in C wurden 6 Klauseln in Φ erzeugt, es gilt also $|\Phi| = 6m$.

Damit folgt für den Parameter s' , dass

$$\frac{\text{cost}(\text{OPT}(\Phi))}{|\Phi|} < \frac{(3 + 3s) \cdot m}{6 \cdot m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot s = s'.$$

Sei C eine MAXE3SAT-Formel mit $\text{cost}(\text{OPT}(C)) \geq c \cdot m$.

Für jede Klausel, die in C erfüllt ist, werden mindestens 4 Klauseln in Φ und für jede nicht erfüllte Klausel in C werden genau 3 Klauseln in Φ erfüllt.

Damit ergibt sich für die Anzahl t_c erfüllter Klauseln in Φ :

$$t_c \geq 4 \cdot c \cdot m + 3 \cdot (1 - c) \cdot m = (3 + c) \cdot m.$$

Es folgt für den Parameter c' , dass

$$\frac{\text{cost}(\text{OPT}(\Phi))}{|\Phi|} \geq \frac{(3 + c) \cdot m}{6 \cdot m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot c = c'.$$

Damit dies eine gültige GP-Reduktion ist, muss gelten, dass $0 \leq s' \leq c' \leq 1$. Die Bedingungen $0 \leq s' < 1$ und $0 < c' \leq 1$ folgen unmittelbar aus der Voraussetzung $0 \leq s \leq c \leq 1$.

Damit aber $s' \leq c'$ gilt, muss gelten, dass

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot s \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot c,$$

also $s \leq \frac{1}{3} \cdot c$.

Da aber für keine Wahl von s und c mit $s \leq \frac{1}{3} \cdot c$ das Lückenproblem $\text{GAP}_{s,c}\text{-MAXE3SAT}$ NP-schwer ist, ist diese GP-Reduktion nicht hilfreich, um die Schwere von MAX2SAT nachzuweisen.