

Lösungsvorschläge – Blatt 6

Zürich, 11. April 2024

Lösung zu Aufgabe 8

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und sei $G^c = (V, E^c)$ der Komplementgraph von G .

(a) Wir zeigen zunächst indirekt die folgende Behauptung:

Für jedes $C \subseteq V$, das ein Vertex-Cover in G ist, ist $V \setminus C$ eine Clique in G^c .

Sei C ein Vertex-Cover in G . Wenn nun $V \setminus C$ keine Clique in G^c ist, existieren zwei Knoten $u, v \in V \setminus C$, für die gilt, dass $\{u, v\} \notin E^c$. Daraus folgt jedoch $\{u, v\} \in E$. Damit wäre die Kante $\{u, v\}$ aber nicht von C überdeckt, was im Widerspruch zur Annahme steht, C sei ein Vertex-Cover von G .

Auf der anderen Seite sei $V \setminus C$ eine Clique in G^c und sei die Kante $\{u, v\} \in E$, also $\{u, v\} \notin E^c$. Wenn nun weder der Knoten u noch der Knoten v in C liegen ($u, v \notin C$), dann gilt $u, v \in V \setminus C$. Diese beiden Knoten sind aber in G^c nicht verbunden, was im Widerspruch zur Annahme steht, dass $V \setminus C$ eine Clique in G^c ist.

Damit folgt für jedes $k \leq |V|$, dass G genau dann ein Vertex-Cover der Grösse $|V| - k$ enthält, wenn G^c eine Clique der Grösse k enthält.

(b) Um mit Hilfe der Transformation (1) zu beweisen, dass MAX-CL AP-reduzierbar auf MIN-VC ist, müssten wir nun zeigen, dass Folgendes gilt: Für ein bestimmtes $\alpha > 0$ kann man eine beliebige MAX-CL-Instanz nehmen und den Komplementgraphen bilden. Wenn dann $C \subseteq V$ auf dem Komplement eine $(1+\delta)$ -Approximation mit $\delta > 0$ für MIN-VC bildet, kann man C durch die Transformation (1) in eine Lösung $V \setminus C$ von MAX-CL umformen. Diese Lösung müsste dann eine $(1 + \alpha \cdot \delta)$ -Approximation für die optimale Lösung der MAX-CL-Instanz sein (gegenüber der Darstellung in Definition 7.11 gilt $\delta = \varepsilon/\alpha$). Wir geben nun eine Familie von Graphen an, für die dies für $\delta = 1$ offensichtlich nicht gilt:

Für jedes $n \geq 1$ sei G_n der Graph, der aus n disjunkten Paaren von Knoten besteht (siehe Abbildung 1(a)). Der Komplementgraph $(G_n)^c$ enthält dann Cliques mit jeweils n Knoten (siehe Abbildung 1(b)), z. B. die Menge der linken Knoten in der

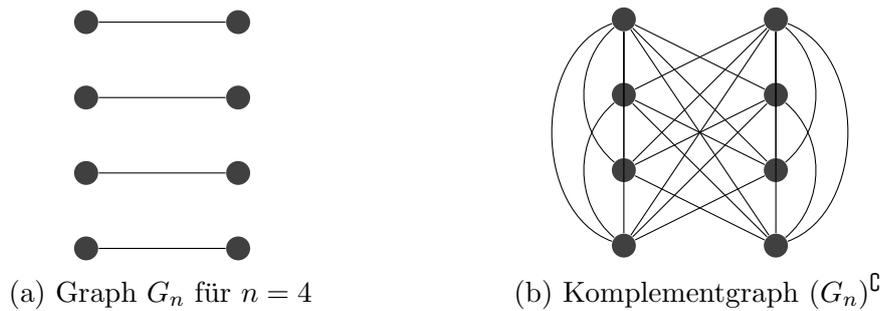


Abbildung 1: Graph und Komplementgraph für $n = 4$.

Abbildung, aber auch jede andere Knotenmenge, die genau einen Knoten aus jeder Kante aus G_n enthält. Diesen Graphen $(G_n)^c$ nehmen wir als Eingabe-Instanz für MAX-CL.

Nun formen wir diese MAX-CL-Instanz $(G_n)^c$ in eine MIN-VC-Instanz um. Dazu berechnen wir den Komplementgraphen von $(G_n)^c$ und erhalten $((G_n)^c)^c = G_n$. Auf die MIN-VC-Instanz wenden wir den Vertex-Cover-Algorithmus aus der Vorlesung an. Dieser nimmt alle Knoten von G_n in das Vertex-Cover C auf und bildet eine 2-Approximation, also eine $(1 + \delta)$ -Approximation für $\delta = 1$. Benutzt man nun die Transformation aus (1), erhält man die Aussage:

$$V \text{ ist ein Vertex-Cover von } G_n \iff V \setminus V = \emptyset \text{ ist eine Clique von } (G_n)^c.$$

Für die ursprüngliche Instanz für MAX-CL erhalten wir mit diesem Vorgehen also die Clique \emptyset der Grösse 0. Da jeder nichtleere Graph aber eine Clique der Grösse mindestens 1 enthält (und $(G_n)^c$ sogar eine Clique der Grösse n), kann keine endliche Approximationsgüte für das MAX-CL-Problem erreicht werden. Insbesondere ist die so erreichte Güte sicherlich schlechter als $1 + \alpha \cdot \delta = 1 + \alpha$ für jedes konstante α .

Dies sollte uns nicht überraschen. Wie in der Vorlesung erwähnt, können wir nämlich auch folgende Variante von Lemma 7.3 beweisen:

Seien U_1 und U_2 Optimierungsprobleme. Falls ein Approximationsalgorithmus für U_2 mit Güte $\beta_2 \in \mathbb{Q}^{\geq 1}$ existiert und $U_1 \leq_{\text{AP}} U_2$, dann existiert auch ein Approximationsalgorithmus für U_1 mit Güte β_1 für U_1 für irgendein $\beta_1 \in \mathbb{Q}^{\geq 1}$.

Wir werden später in der Vorlesung sogar zeigen, dass MAX-CL überhaupt nicht konstant approximierbar ist, falls $P \neq NP$. Falls also MAX-CL \leq_{AP} MIN-VC wäre, dürfte es auch keinen Algorithmus mit konstanter Approximationsgüte für MIN-VC geben. In der Vorlesung haben wir aber einen Algorithmus gesehen, der eine 2-Approximation für MIN-VC liefert.