

Übungsaufgaben – Blatt 4

Zürich, 14. März 2024

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe betrachten wir das MINIMUM PARTITION-Problem, in dem es darum geht, eine gegebene Menge natürlicher Zahlen möglichst gleichmässig in zwei Teilmengen zu partitionieren. Formal handelt es sich dabei um das folgende Minimierungsproblem:

Eingabe: $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ mit $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$.

Zulässige Lösungen: Jede Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

Kosten: $\text{cost}(I) = \max\{\sum_{i \in I} a_i, \sum_{i \in \{1, 2, \dots, n\} - I} a_i\}$.

Ziel: Minimierung.

Wir wollen ein PTAS für MINIMUM PARTITION entwerfen.

- Beschreiben Sie in Pseudocode ein PTAS für das Problem, das auf der Idee beruht, für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$ jede Teilmenge von $\{a_1, \dots, a_k\}$ mit einer Greedy-Strategie zu erweitern, die die Zahlen a_{k+1}, \dots, a_n in absteigender Reihenfolge jeweils der Teilmenge mit kleinerer Gesamtsumme zuordnet.
- Analysieren Sie die Laufzeit Ihres PTAS.
- Sei I eine von dem Algorithmus berechnete Lösung und sei $d_i = |\sum_{t \in \{1, \dots, i\} \cap I} a_t - \sum_{t \in \{1, \dots, i\} \setminus I} a_t|$.
Zeigen Sie, dass für alle $i > k$ gilt, dass $d_i = d_{i-1} - a_i$ oder $d_i \leq a_i$.
- Zeigen Sie, dass aus $d_i \leq a_i$ folgt, dass auch $d_j \leq a_i$ gilt für alle $j \geq i \geq k$.
- Verwenden Sie die Aussage aus Aufgabenteil (d), um die Approximationsgüte Ihres Algorithmus zu analysieren.

10 Punkte

Aufgabe 5

Beim *modifizierten* einfachen Rucksackproblem MSKP erlaubt man, dass von jedem gegebenen Objekt beliebig viele Exemplare in den Rucksack gepackt werden. Es sind also Größen $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{N}^{>0}$ gegeben und ein Wert b , der die Kapazität des Rucksacks angibt. Gesucht ist ein Vektor $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, sodass $\sum_{i=1}^n a_i w_i \leq b$ maximiert wird.

Entwerfen Sie einen einfachen Approximationsalgorithmus mit möglichst kleiner Approximationsgüte für das MSKP und schätzen Sie dessen Güte und Laufzeit ab. **10 Punkte**

Abgabe: Am 21. März zu Beginn der Übungsstunde.