ETH zürich
Departement Informatik

Approximations- und Online-Algorithmen

Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Manuel Wettstein

`courses.csedu.inf.ethz.ch/approx_online_alg_24`

Übungsaufgaben – Blatt 3

Zürich, 7. März 2024

Aufgabe 3

Wir betrachten das Optimierungsproblem MaxCUT (ohne gewichtete Kanten) für einen Graphen $G = (V, E)$ mit $n = |V|$ Knoten.

(a) Wir wollen folgenden einfachen randomisierten Approximationsalgorithmus analysieren: Für jeden Knoten $v \in V$ wird der Reihe nach eine faire Münze geworfen. Falls die geworfene Münze Kopf zeigt, wird der Knoten v zur (anfangs leeren) Menge A hinzugefügt. Falls die Münze Zahl zeigt, wird der Knoten v zur (anfangs leeren) Menge B hinzugefügt. Der so konstruierte Schnitt (A, B) wird am Schluss ausgegeben.

Zeigen Sie, dass die erwartete Approximationsgüte des beschriebenen Algorithmus kleiner oder gleich 2 ist. Anders ausgedrückt, zeigen Sie, dass die Anzahl Kanten $|E(A, B)|$ im Erwartungswert mindestens halb so gross wie die Anzahl Kanten im optimalen Schnitt von G ist.

(b) Wir erinnern uns an die SDP-Relaxierung von MaxCUT aus der Vorlesung. Dabei wird durch Optimierung eines bestimmten semidefiniten Programms jedem Knoten $v_i \in V$ ein Vektor $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$ mit Norm $\|\vec{x}_i\|_2 = 1$ zugewiesen. Danach werden diese Vektoren $\vec{x}_i$ mit Hilfe einer zufällig gewählten Hyperebene durch den Ursprung je einer von zwei möglichen Seiten zugeordnet, wodurch ein Schnitt in G definiert wird.

Wir könnten jetzt einen simpleren Algorithmus betrachten, der die Vektoren $\vec{x}_i$ einfach auf die Einheitsvektoren $\vec{x}_i = \vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$ setzt ($\vec{e}_i$ ist der Vektor mit allen Einträgen gleich 0, ausser einer 1 in der i-ten Koordinate). Berechnen sie die erwartete Approximationsgüte dieses vereinfachten Algorithmus.

(c) Wir betrachten nun eine *gerichtete* Version des MaxCUT-Problems. Das heisst alle Kanten $(u, v) \in E$ haben einen eindeutigen *Startknoten* u und einen eindeutigen *Endknoten* v. Die *Grösse* eines Schnitts (A, B) ist entsprechend definiert als die Anzahl Kanten $(u, v) \in E$ für die $u \in A$ und $v \in B$ gilt. Die Kanten von B nach A werden nicht mitgezählt. Modellieren Sie die gerichtete Version des MaxCUT-Problems als ganzzahliges quadratisches Programm in den Variablen $x_1, \ldots, x_n \in \{-1, 1\}$. Wie sieht die zugehörige SDP-Relaxierung aus?

Hinweis: Führen Sie eine zusätzliche Variable x_0 ein, die festlegt, was die Werte der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ bedeuten.

10 Punkte

Abgabe: Am 14. März zu Beginn der Übungsstunde.