

## Übungsaufgaben – Blatt 2

Zürich, 29. Februar 2024

### Aufgabe 2

Wir betrachten das Optimierungsproblem  $k$ -CENTER für  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

Optimierungsproblem  $k$ -CENTER

**Eingabe:** Ein endlicher vollständiger metrischer Graph mit Knotenmenge  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $n \geq k \geq 1$  und Distanzfunktion  $d: E \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Zulässige Lösungen:** Eine Auswahl  $Z \subseteq V$  von  $k$  Knoten, die wir Zentren nennen.

**Kosten:** Für eine Zentrenmenge  $Z$  ist der kürzeste Weg von einem Knoten  $v$  zu einem Zentrum  $d(v, Z) := \min_{z \in Z} d(\{v, z\})$  und die Kosten sind  $\rho := \max_{v \in V} d(v, Z)$ .

**Ziel:** Minimierung.

- Beschreiben Sie einen Approximationsalgorithmus für  $k$ -CENTER, der zu Beginn einen beliebigen Knoten als erstes Zentrum festlegt und danach das Greedy-Verfahren anwendet, als nächstes Zentrum also immer einen Knoten auswählt, der in der momentanen Situation am meisten zu den Kosten beiträgt.
- Weisen Sie nach, dass der Algorithmus aus Aufgabenteil (a) 2-approximativ ist. Gehen Sie dazu von einer festen optimalen Lösung für die jeweilige Instanz aus und zeigen Sie, dass die Lösung des Algorithmus höchstens doppelt so hohe Kosten hat.
- Zeigen Sie, dass die in (b) bewiesene obere Schranke für den Algorithmus aus (a) optimal ist, indem Sie für jedes  $k \geq 1$  eine schwere Eingabe angeben, auf der der Algorithmus keine bessere Approximationsgüte als 2 erreicht.

**10 Punkte**

**Abgabe:** Am 7. März zu Beginn der Übungsstunde.