

## Lösungsvorschläge – Blatt 12

Zürich, 2. Juni 2022

### Lösung zu Aufgabe 18

Wir betrachten also den randomisierten Online-Algorithmus CIRC für das  $k$ -Server-Problem auf einem Kreisgraphen  $G_N$  und zeigen, dass dieser  $2k$ -kompetitiv ist. Sei  $e_{\text{split}} = e_i$  für ein  $i$  mit  $1 \leq i \leq N$  die von CIRC zufällig ausgewählte Kante und sei  $P_{i,N}$  der so entstandene Pfad, auf dem DC simuliert wird. Sei ferner  $\text{LINOPT}_i$  ein optimaler Algorithmus für  $P_{i,N}$ ; mit  $\text{CIRC}_i$  bezeichnen wir das Verhalten von CIRC auf  $P_{i,N}$ . Aus der  $k$ -Kompetitivität von DC folgt sofort, dass

$$\text{cost}(\text{CIRC}_i(I)) \leq k \cdot \text{cost}(\text{LINOPT}_i(I)) + \alpha$$

für jede Instanz  $I$  auf  $P_{i,N}$  gilt, wobei  $\alpha$  eine Konstante ist.

Sei jetzt OPT ein optimaler Offline-Algorithmus für die gegebene Instanz  $I$  auf  $G_N$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, OPT sei träge. Wir betrachten ausserdem den Algorithmus  $\text{DOPT}_i$ , der genau wie OPT agiert, jedoch immer, wenn OPT die Kante  $e_i$  überquert, stattdessen einen Umweg in entgegengesetzter Richtung läuft, was jeweils Kosten von weniger als  $N$  verursacht. Damit ist  $\text{DOPT}_i$  faktisch ein Algorithmus für  $P_{i,N}$ , und wegen der Optimalität von LINOPT folgt wiederum  $\text{cost}(\text{LINOPT}_i(I)) \leq \text{cost}(\text{DOPT}_i(I))$  und somit

$$\text{cost}(\text{CIRC}_i(I)) \leq k \cdot \text{cost}(\text{DOPT}_i(I)) + \alpha .$$

Wenn wir nun die entsprechenden Kosten als Zufallsvariablen bezüglich der zufälligen Wahl von  $e_i$  auffassen, folgt

$$\mathbb{E}[\text{cost}(\text{CIRC}(I))] \leq k \cdot \mathbb{E}[\text{cost}(\text{DOPT}(I))] + \alpha . \quad (1)$$

Wir bemerken, dass die zufällig gewählte Kante  $e_{\text{split}} = e_i$  dem Gegenspieler nicht bekannt ist und dass sie uniform zufällig gezogen wird. Somit können wir nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass  $e_{\text{split}}$  in einem Zeitschritt von OPT benutzt wird, was wir mit einem einfachen Zählargument tun. Seien, für jeden Zeitschritt  $T_j$  mit  $1 \leq j \leq n$ ,  $c_j$  die Kosten von OPT in diesem Zeitschritt. Kosten von  $c_j$  bedeuten nichts anderes, als dass OPT in diesem Zeitschritt  $c_j$  Kanten benutzt, denn alle Kantenkosten sind 1. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Kanten  $e_{\text{split}}$  ist, ist somit genau  $c_j/N$ ; mit dieser Wahrscheinlichkeit hat

$\text{DOPT}_i$  also Kosten  $N$  im  $j$ ten Zeitschritt. Folglich sind die Kosten, die  $\text{DOPT}_i$  aufgrund von Umwegen zu zahlen hat, im Erwartungswert höchstens

$$\sum_{j=1}^n \frac{c_j}{N} N .$$

Damit folgt für die erwarteten Kosten von  $\text{DOPT}$  auf  $I$

$$\mathbb{E}[\text{cost}(\text{DOPT}(I))] \leq \text{cost}(\text{OPT}(I)) + \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{N} N = 2 \cdot \text{cost}(\text{OPT}(I)) . \quad (2)$$

Mit (1) und (2) ergibt sich schliesslich

$$\mathbb{E}[\text{cost}(\text{CIRC}(I))] \leq k \cdot \mathbb{E}[\text{cost}(\text{DOPT}(I))] + \alpha \leq 2k \cdot \text{cost}(\text{OPT}(I)) + \alpha ,$$

also dass der erwartete kompetitive Faktor von  $\text{CIRC}$  höchstens  $2k$  ist.